

# Convection naturelle tridimensionnelle en milieu poreux saturé par un fluide présentant un maximum de densité

I. ALTIMIR

Laboratoire de Thermique, Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint-Martin,  
75141 Paris Cedex 03, France

(Reçu le 20 Septembre 1983)

**Résumé**— Une étude numérique des effets de l'inversion de densité sur le transfert de chaleur en milieu poreux confiné est effectuée à partir d'une modélisation tridimensionnelle des champs de température et de vitesse. Le milieu poreux est confiné dans une enceinte parallélépipédique dont les parois horizontales sont maintenues à des températures différentes et dont les parois verticales sont adiabatiques. La masse volumique est représentée par une loi parabolique dans l'équation de Darcy généralisée. Les équations de la convection naturelle sont résolues par la méthode de Galerkin avec un schéma d'intégration temporelle de type explicite. Les calculs ont été effectués pour une enceinte de forme cubique. Les résultats obtenus sont commentés, mettant en évidence que l'inversion de densité provoque une séparation de l'écoulement en deux structures superposées. En partie basse de la cavité, le transfert de chaleur s'effectue par convection, alors qu'en partie haute il s'effectue principalement par conduction. L'influence du maximum de densité sur le nombre de Nusselt est aussi présentée.

## 1. INTRODUCTION

CETTE étude propose une modélisation tridimensionnelle de la convection naturelle dans un milieu poreux confiné latéralement par des parois verticales adiabatiques, limité horizontalement par deux parois à températures différentes et saturé par un fluide qui présente un maximum de densité dans ce domaine.

Il a été montré, par une analyse de stabilité linéaire [1], que le critère d'apparition de la convection dans une couche poreuse saturée par un fluide présentant un maximum de densité peut être représenté par un nombre de Rayleigh critique modifié dont la valeur dépend de paramètres déterminés par le niveau de température des parois et les coefficients de dilatation du fluide (la loi de variation de la masse volumique du fluide y est représentée par un polynôme du troisième degré). Les valeurs numériques du nombre de Rayleigh critique ainsi obtenues ont été confirmées par une étude expérimentale effectuée par Yen, dans une couche poreuse horizontale constituée de billes de verre, saturée par de l'eau et chauffée par dessous [2]. Il a été mis en évidence que lorsque la paroi haute est maintenue à 4 ou 8°C, ce qui supprime les effets de l'inversion de densité dans l'eau, le nombre de Rayleigh critique est égal à  $4\pi^2$ . Lorsque la paroi haute est maintenue à 0°C, la présence d'un maximum de densité modifie le transfert de chaleur. L'auteur propose une formule empirique liant le nombre de Nusselt au nombre de Rayleigh modifié

$$Nu = 0,024Ra_m^{0,85} \quad \text{pour } Ra_m > 100$$

où  $Ra_m$  est le nombre de Rayleigh défini par Sun *et al.* [1].

Les études théoriques sur les transferts thermoconvectifs en présence d'une inversion de densité n'ont été

effectuées, à notre connaissance, qu'en fluide pur. Forbes et Cooper [3] ont montré que dans une couche d'eau refroidie à 0°C par dessus, on observe une séparation de la couche d'eau en deux régions distinctes, délimitées par la surface isotherme à 4°C. Les mouvements convectifs importants sont localisés dans la région d'instabilité hydrodynamique située sous l'isotherme 4°C. Au dessus, la couche d'eau est stable et le transfert de chaleur est principalement conductif. On y remarque cependant un mouvement dû à un effet d'entraînement visqueux au voisinage de l'isotherme 4°C.

Ce texte présente tout d'abord, les équations générales du problème pour un milieu poreux confiné dans une enceinte parallélépipédique ayant des rapports de forme et une inclinaison quelconques. La méthode de résolution numérique utilisée est une adaptation de la méthode spectrale déjà exploitée par Caltagirone *et al.* dans le cas des fluides à variation linéaire de densité [4]. Les calculs ont été effectués avec une forme d'enceinte cubique et des parois isothermes horizontales.

## 2. FORMULATION MATHÉMATIQUE GÉNÉRALE

On considère un milieu poreux confiné dans une enceinte parallélépipédique de hauteur  $H$ , de dimensions transversales  $L$  et  $M$ , dont les deux parois situées en  $z = 0$  et  $H$  sont maintenues aux températures  $T_1$  et  $T_2$  (Fig. 1). L'inclinaison des parois isothermes par rapport au plan horizontal et représentée par l'angle  $\phi$ . Les parois latérales sont adiabatiques.

Le milieu poreux est supposé indéformable, homogène, isotrope et saturé par un fluide unique

**NOMENCLATURE**

$a_{ijk}$  coefficients de Fourier du champ de température  
 $b_{ijk}$  coefficients de Fourier du champ de vitesses  
 $A$  rapport de forme,  $L/H$   
 $B$  rapport de forme,  $M/H$   
 $C_p$  chaleur massique  
 $e_i$  vecteurs unitaires du repère lié à l'enceinte  
 $g$  vecteur accélération de la pesanteur  
 $H$  distance entre parois isothermes  
 $L$  dimension transversale selon la coordonnée  $x$   
 $M$  dimension transversale selon la coordonnée  $y$   
 $k$  vecteur colinéaire au champ de pesanteur,  $A \sin \phi e_1 + \cos \phi e_3$   
 $K$  perméabilité du milieu poreux  
 $\overline{Nu}^*$  nombre de Nusselt moyen à la paroi  $z = 0$ ,  $Nu^* = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial T(0)}{\partial Z} dx dy$   
 $p$  pression  
 $Ra_2^*$  nombre de Rayleigh modifié,  $\beta_2 g \Delta T^2 H K (\rho c)_f / \lambda^* \nu_0$   
 $T_0$  température de référence  
 $T_1$  température de paroi en  $z = 0$   
 $T_2$  température de paroi en  $z = H$   
 $T_m$  température du fluide à son maximum de densité  
 $\Delta T$  écart de température entre parois isothermes,  $T_1 - T_2$

$t$  temps  
 $U, V, W$  composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{V}$   
 $U_{ijk}, V_{ijk}, W_{ijk}$  fonctions de bases des composantes de la vitesse  
 $x, y$  coordonnées parallèles aux plans isothermes  
 $z$  coordonnée normale aux plans isothermes.

**Symboles grecs**

$\beta_1, \beta_2$  coefficients de dilatation thermique du fluide  
 $\gamma$  paramètre d'inversion,  $-2(T_m - T_2)/\Delta T$   
 $\varepsilon$  porosité du substrat  
 $\lambda$  conductivité thermique  
 $\nu$  viscosité cinématique du fluide,  $\mu/\rho$   
 $\rho$  masse volumique du fluide,  $\rho_0 [1 - \beta_1(T - T_0) - \beta_2(T - T_0)^2]$   
 $\rho_0$  masse volumique du fluide à  $T_0$   
 $\rho_m$  masse volumique maximale du fluide à  $T_m$   
 $\phi$  angle d'inclinaison des parois isothermes par rapport au plan horizontal.

**Indices**

$c$  critique  
 $f$  fluide  
 $s$  solide  
 $*$  milieu fictif équivalent à l'ensemble solide-fluide.

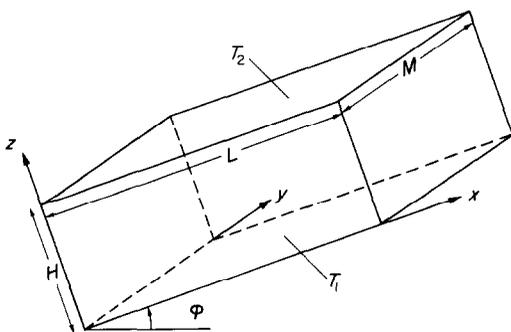


FIG. 1. Modèle physique et système de coordonnées.

s'écoulant par convection naturelle laminaire à faible vitesse. La phase solide est caractérisée par sa conductivité  $\lambda_s$  et sa chaleur volumique  $(\rho c)_s$ , la phase fluide par sa conductivité  $\lambda_f$ , sa chaleur volumique  $(\rho c)_f$ , sa viscosité dynamique  $\mu$ , et deux coefficients de dilatation thermique  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

La loi de variation de la masse volumique donnant les effets d'inversion est représentée par

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta_1(T - T_0) - \beta_2(T - T_0)^2]. \quad (1)$$

L'extremum  $\rho_m$  étant atteint à la température  $T_m$ , les coefficients sont liés par la relation

$$\beta_1 = -2\beta_2(T_m - T_0). \quad (2)$$

Les deux phases sont supposées en équilibre thermique local. La chaleur volumique équivalente du milieu poreux est définie par

$$(\rho c)^* = \varepsilon(\rho c)_f + (1 - \varepsilon)(\rho c)_s,$$

où  $\varepsilon$  est la porosité du milieu.

Les moyens de calculs de la conductivité équivalente  $\lambda^*$  sont exposés dans les références [2, 5].

En supposant la validité de l'approximation de Boussinesq et en considérant que le terme d'inertie de l'équation de Darcy est négligeable, le modèle du milieu fictif conduit au système d'équations suivant

$$\text{div } \mathbf{V} = 0$$

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{\mu}{K} \mathbf{V} = -\text{grad } p + \rho g \quad (3)$$

$$(\rho c)^* \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c)_f \mathbf{V} \cdot \text{grad } T = \lambda^* \Delta T.$$

où  $V$  est la vitesse de filtration et  $K$  la perméabilité du milieu.

Les conditions d'imperméabilité aux parois et les conditions aux limites thermiques associées au système sont

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0, L, \quad U = 0, \quad \partial T / \partial x = 0 \\ \text{en } y = 0, M, \quad V = 0, \quad \partial T / \partial y = 0 \\ \text{en } z = 0, \quad W = 0, \quad T(x, y, 0) = T_1 \\ \text{en } z = H, \quad W = 0, \quad T(x, y, H) = T_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Ce système est écrit sous forme adimensionnelle en prenant comme grandeurs de référence :  $L$ ,  $M$  et  $H$  pour les longueurs,  $(\rho c)^* H^2 / \lambda^*$  pour le temps,  $\Delta T = T_1 - T_2$  pour les températures,  $\lambda^* / L(\rho c)_f$ ,  $\lambda^* / M(\rho c)_f$  et  $\lambda^* / H(\rho c)_f$  pour les trois composantes de la vitesse et  $\mu \lambda^* / K(\rho c)_f$  pour la pression. Le terme transitoire de l'équation du mouvement est supposé négligeable. Le système d'équations adimensionnelles s'écrit, en utilisant les mêmes notations pour les variables adimensionnelles, sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \\ \mathbf{V} = -\text{grad } p + Ra_2^* [\gamma T + T^2] \mathbf{k} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \left( \frac{U}{A^2} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{V}{B^2} \frac{\partial T}{\partial y} + W \frac{\partial T}{\partial z} \right) \\ = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (5)$$

où  $A = L/H$  et  $B = M/H$  sont les deux rapports de forme de l'enceinte et où  $\mathbf{k}$  est le vecteur défini par

$$\mathbf{k} = A \sin \phi \mathbf{e}_1 + \cos \phi \mathbf{e}_3.$$

Le nombre de Rayleigh de filtration modifié  $Ra_2^*$  est défini par

$$Ra_2^* = \frac{\rho_0 g \beta_2 \Delta T^2 H K (\rho c)_f}{\lambda^* \mu} \quad (6)$$

et le paramètre d'inversion  $\gamma$  par

$$\gamma = -2T_m^* \quad \text{où} \quad T_m^* = (T_m - T_2) / (T_1 - T_2). \quad (7)$$

$Ra_2^*$  étant proportionnel à  $(\Delta T)^2$ , une couche poreuse refroidie par en dessous peut être le siège des mêmes mouvements convectifs qu'une couche poreuse chauffée par en dessous, la valeur de  $\gamma$  pouvant être identique dans les deux cas. Cette valeur est comprise entre  $\gamma = -2$  et 0 lorsque la température du fluide à son maximum de densité est comprise entre  $T_1$  et  $T_2$ . Pour  $\gamma = 0$ , le maximum de densité est atteint au niveau de la paroi supérieure; le transfert est maximal. Pour  $\gamma = -2$ , le maximum de densité est atteint à la paroi inférieure; quelque soit le nombre de Rayleigh, le transfert est purement conductif.

Le transfert de chaleur à travers la couche est représenté par le nombre de Nusselt moyen dans les plans  $z = \text{cste}$ .

En régime permanent, son expression est donnée par

$$\begin{aligned} \overline{Nu}^*(z) = - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial T(z)}{\partial z} dx dy \\ - \int_0^1 \int_0^1 W(z) T(z) dx dy = \text{cste}. \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. METHODE DE RESOLUTION NUMERIQUE

Le système d'équations adimensionnelles est transformé par la méthode de Galerkin. La température et les trois composantes de la vitesse sont développées en séries sous la forme

$$\begin{aligned} T = 1 - Z + \sum_0^L \sum_0^M \sum_1^N a_{lmn}(t) \\ \times \cos(l\pi x) \cos(m\pi y) \sin(n\pi z) \\ U = -A^2 \sum_1^L \sum_0^M \sum_1^N b_{lmn}(t) \ln \pi^2 \\ \times \sin(l\pi x) \cos(m\pi y) \cos(n\pi z) \\ V = -B^2 \sum_0^L \sum_1^M \sum_1^N b_{lmn}(t) mn\pi^2 \\ \times \cos(l\pi x) \sin(m\pi y) \cos(n\pi z) \\ W = \sum_0^L \sum_0^M \sum_1^N b_{lmn}(t) (l^2 + m^2) \pi^2 \\ \times \cos(l\pi x) \cos(m\pi y) \sin(n\pi z). \end{aligned} \quad (9)$$

Ainsi définies, les fonctions  $T$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  et les fonctions de base de leur développement vérifient les conditions aux limites du système. L'équation de continuité est satisfaite par les composantes de la vitesse.

L'équation du mouvement est multipliée par une fonction de base de la vitesse et intégrée dans le volume.

$$\begin{aligned} \iiint (UU_{ijk} + VV_{ijk} + WW_{ijk}) dv \\ = \iiint -\text{grad } p \cdot \mathbf{V}_{ijk} dv \\ + Ra_2^* A \sin \phi \iiint U_{ijk} [\gamma T + T^2] dv \\ + Ra_2^* \cos \phi \iiint W_{ijk} [\gamma T + T^2] dv \end{aligned} \quad (10)$$

où  $\mathbf{V}_{ijk}$  a pour composantes

$$\begin{aligned} U_{ijk} = -\ln \pi^2 \sin(l\pi x) \cos(m\pi y) \cos(n\pi z) \\ V_{ijk} = -mn\pi^2 \cos(l\pi x) \sin(m\pi y) \cos(n\pi z) \\ W_{ijk} = (l^2 + m^2) \pi^2 \cos(l\pi x) \cos(m\pi y) \sin(n\pi z). \end{aligned} \quad (11)$$

Le terme de pression est éliminé par l'utilisation de théorème de la divergence. Le terme non linéaire du développement de  $T^2$  est transformé en calculant ses

valeurs dans un maillage du domaine physique à l'aide des transformées rapides de Fourier, puis en développant la fonction obtenue en série de Fourier à l'aide d'une transformation inverse

$$T^2 = (1-z)^2 + 2(1-z) \sum_0^L \sum_0^M \sum_1^N a_{lmn} \times \cos(l\pi x) \cos(m\pi y) \sin(n\pi z) + \sum_0^L \sum_0^M \sum_1^N c_{lmn} \cos(l\pi x) \cos(m\pi y) \sin(n\pi z). \quad (12)$$

Les coefficients  $b_{ijk}$  du champ des vitesses sont obtenus explicitement après évaluation des intégrales sous la forme

$$b_{ijk} = \frac{Ra_2^* \cos \phi(i^2 + j^2)}{[A^2 i^2 k^2 + B^2 j^2 k^2 + (i^2 + j^2)^2] \pi^2} \times \left\{ (\gamma + 1) a_{ijk} + c_{ijk} + \frac{16k}{\pi^2} \times \sum_1^N a_{ijn} \frac{n}{(n^2 - k^2)^2} \delta_{n+k, 2p+1} \right\} - \frac{Ra_2^* A \sin \phi 16i^2 k}{[A^2 i^2 k^2 + B^2 j^2 k^2 + (i^2 + j^2)^2] \pi^2} \times \sum_0^L \frac{\delta_{i+1, 2p+1}}{(i^2 - l^2)} \left\{ \frac{a_{ljk}}{4k} + \sum_1^N \frac{n}{(n^2 - k^2)} \times [\delta_{n+k, 2p+1} (\gamma a_{ijn} + c_{ijn}) + (1 - \delta_{n,k}) a_{ijn}] \right\} - \delta_{j,0} \delta_{i, 2p+1} \frac{Ra_2^* A 16 \sin \phi}{[A^2 i^2 k^2 + i^4] k \pi^5} (\gamma \delta_{k, 2p+1} + 1). \quad (13)$$

L'application de la méthode à l'équation de l'énergie transforme le système aux dérivées partielles en un système différentiel non linéaire sur les coefficients du champ de température

$$\frac{d[a_{ijk}(t)]}{dt} = -\pi^2 \left\{ \frac{i^2}{A^2} + \frac{j^2}{B^2} + k^2 \right\} a_{ijk}(t) + \{(i^2 + j^2) \pi^2 b_{ijk}(t) - d_{ijk}(t)\} \quad (14)$$

dans lequel les coefficients  $d_{ijk}$  sont les coefficients du développement en série du terme non linéaire de  $\mathbf{V} \cdot \text{grad } T$ .

Comme il a été écrit plus haut, la résolution numérique de ce système est traitée par adaptation d'un programme de calcul utilisé dans la référence [4]. On utilise un schéma d'intégration explicite de type Adams-Bashforth d'ordre trois en injectant au départ du calcul des coefficients initiaux  $a_{ijk}(t = 0)$  représentatifs de l'écoulement de base.

Le nombre de Nusselt est alors évalué par l'expression

$$\overline{Nu}^*(z) = 1 - \sum_1^N \{ \pi k a_{00k} \cos k\pi z - e_{00k} \sin k\pi z \} \quad (15)$$

où les coefficients  $e_{ijk}$  proviennent du développement en série de Fourier de la partie non linéaire du produit  $W(z) \cdot T(z)$ . En  $z = 0$ , on retrouve l'expression classique

$$\overline{Nu}^*(0) = 1 - \pi \sum_1^N k a_{00k}. \quad (16)$$

Les calculs ont été effectués dans le cas où les parois isothermes sont horizontales ( $\phi = 0$ ) et où l'enceinte est de forme cubique ( $A = B = 1$ ). Les résultats ont été obtenus en injectant comme condition initiale des coefficients arbitrairement petits,  $a_{ijk}(0) = 10^{-5}$ , introduisant une légère perturbation de l'état conductif. Le critère de convergence vers un état stationnaires est fixé par la convergence des nombres de Nusselt  $Nu^*(z)$  vers une valeur unique et stationnaire. Dans le domaine de démarrage de la convection, les solutions sont décrites par un développement en neuf termes dans chaque direction et au-delà, par un développement en dix sept termes dans la direction Z. Le nombre d'itérations nécessaires dans les cas pointus (à fort nombre de Rayleigh et faible inversion) est de l'ordre de trois mille. Néanmoins, la formulation du problème est très adaptée aux possibilités de traitement numérique par des calculateurs vectoriels. L'utilisation de sous-programmes vectorisables de calculs simultanés de transformées de Fourier rapides permet des temps de calculs inférieurs au quarantième de seconde par itération sur ordinateur CRAY-ONE.

### 3. RESULTATS NUMERIQUES

#### 3.1. Critères d'apparition de la convection

Le domaine de démarrage de la convection a été déterminé par l'étude des conditions critiques suffisantes d'instabilité de l'état de référence de type conductif. La théorie linéaire des petites perturbations est appliquée au système d'équations générales (5) dans lequel  $\phi = 0$ .

En négligeant les produits et puissances de perturbations et en éliminant les termes de pression et de composante verticale de la vitesse entre les équations, le système se réduit à une seule équation en perturbation de température  $\theta$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \Delta \theta = Ra_2^* \Delta_{xy} \{ \theta(\gamma + 2 - 2z) \} \quad (17)$$

où les opérateurs sont définis par

$$\Delta = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et

$$\Delta_{xy} = \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Les perturbations peuvent être décrites par des fonctions, vérifiant les conditions aux limites, de la forme

$$\theta = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \chi_n \sin n\pi z \right) \exp \{ i(lx + my) + \sigma t \}. \quad (18)$$

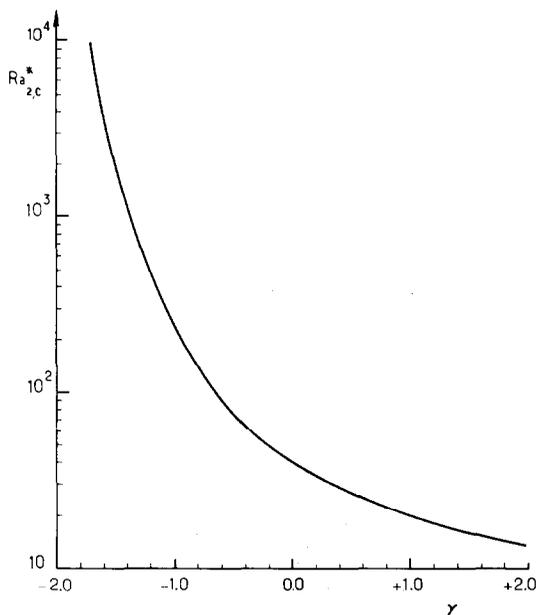


FIG. 2. Courbe de stabilité dans une enceinte à parois isothermes horizontales.

A l'état marginal de transition entre l'état de conduction pure et un état de convection stationnaire,  $\sigma = 0$ . Le procédé de Galerkin est appliqué à l'équation de perturbation qui s'écrit alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2\pi^2 + a^2)^2}{2a^2} \chi_n = Ra_2^* \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\gamma+1)}{2} \delta_{n,k} + 8 \frac{nk}{(n^2 - k^2)\pi^2} \delta_{n+k, 2p+1} \right\} \chi_n \quad (19)$$

où  $a$  est le nombre d'onde associé à la perturbation, défini par

$$a = \left( \frac{l^2}{A^2} + \frac{m^2}{B^2} \right)^{1/2} \quad (20)$$

Pour une valeur fixée du paramètre d'inversion,  $\gamma$ , le nombre de Rayleigh minimum au delà duquel il existe un état de convection stationnaire est défini par le minimum sur  $a$  des valeurs propres de ce système qui n'annulent pas les coefficients de la perturbation.

Le calcul numérique des valeurs propres de l'équation (19) est effectué pour des développements limités à un ordre  $N$ . Le nombre de Rayleigh critique d'apparition de la convection,  $Ra_{2,c}^*$  (8) a été déterminé comme étant le minimum sur  $a$  et  $N$  des valeurs propres du système.

Les conditions critiques d'apparition de la convection sont représentées par la courbe de la Fig. 2.

En  $\gamma = 0$ , c'est-à-dire lorsque le fluide atteint la densité maximum au contact du plan supérieur, les valeurs du nombre de Rayleigh modifié critique,  $Ra_{2,c}^* = 38,54$ , et du nombre d'onde critique,  $a_c^* = 3,20$ , sont voisines des conditions critiques d'apparition de la convection dans une couche plane sans inversion de densité :  $Ra_c^* = 4\pi^2$  et  $a_c = \pi$ .

Pour  $\gamma$  positif, le maximum de densité n'est pas atteint entre les plans frontières et la masse volumique est une fonction croissante dans l'intervalle  $[T_1, T_2]$ .

Le nombre de Rayleigh critique diminue lorsque  $\gamma$  croît par valeur positive. Une approximation linéaire peut être effectuée en écrivant

$$(\rho_2 - \rho_1) = \rho_0 \beta'_1 (T_1 - T_2)$$

avec

$$\beta'_1 = \beta_2 \Delta T (\gamma + 1).$$

Le nombre de Rayleigh modifié peut s'écrire sous la forme

$$Ra_2^* = \left( \frac{\rho_0 g \beta_1 \Delta T H K (\rho c)_f}{\lambda^* \mu} \right) \frac{1}{(\gamma + 1)}.$$

On reconnaît dans le premier terme en facteur, le nombre de Rayleigh de filtration classique établi pour

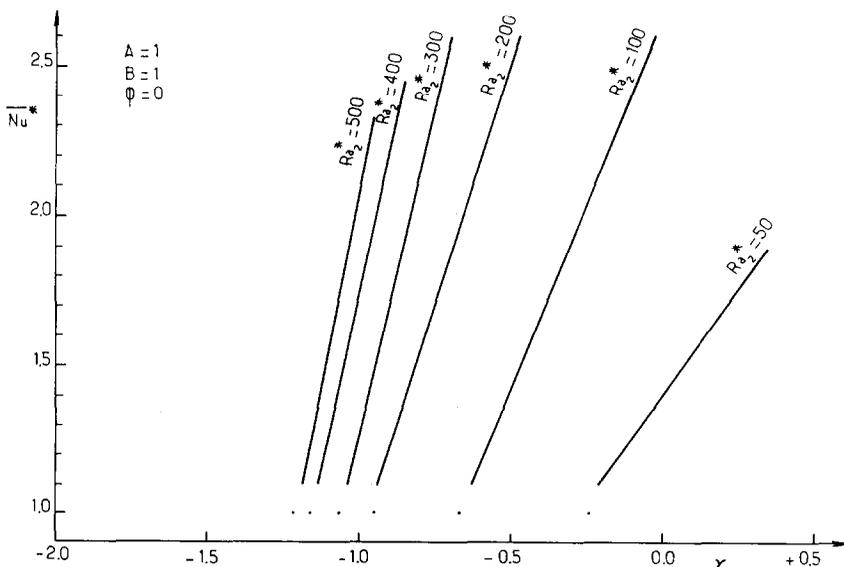


FIG. 3. Variation du nombre de Nusselt moyen à la paroi inférieure avec le nombre de Rayleigh et le paramètre d'inversion.

les fluides à variation linéaire de densité. On constate effectivement que lorsque  $\gamma$  augmente,  $[Ra_{2,c}^*(\gamma + 1)]$  tend vers la valeur  $4\pi^2$ , avec un nombre d'onde critique égal à  $\pi$ .

Dans la zone d'influence de l'extremum de densité, le nombre de Rayleigh critique augmente rapidement lorsque  $\gamma$  décroît de  $\gamma = 0$  à  $-2$ . La variation de la masse volumique n'est susceptible de destabiliser le régime conductif que dans une zone de plus en plus limitée près de la paroi inférieure. Lorsque  $\gamma$  approche la valeur  $\gamma = -2$ , c'est-à-dire lorsque la température de paroi inférieure tend vers  $T_m$ , le nombre de Rayleigh critique tend vers l'infini.

3.2. Transfert thermoconvectif stationnaire

Les cas étudiés couvrent un domaine de variation du nombre de Rayleigh compris entre  $Ra_2^* = 50$  et 500. Le paramètre d'inversion varie de  $\gamma = -2$  à 0, de façon à ce que la température au maximum de densité soit comprise entre  $T_1$  et  $T_2$ . Pour faciliter l'observation d'écoulements tridimensionnels, une forme cubique a été choisie pour l'enceinte. Les parois isothermes sont horizontales.

La Fig. 3 représente les variations du nombre de Nusselt moyen à la paroi inférieure avec le nombre de Rayleigh et le paramètre d'inversion. Les conditions critiques d'apparition de la convection obtenues par l'analyse de stabilité linéaire représentées par des points coïncident avec les calculs.

Le tracé des courbes à nombre de Rayleigh constant met en évidence l'effet stabilisateur de l'inversion de densité dans un milieu chauffé par dessous : pour un même écart  $\Delta T$  entre parois, le transfert de chaleur diminue rapidement lorsque l'écart entre  $T_m$  et la température  $T_1$  de la paroi inférieure diminue.

Ce phénomène est sensible aux faibles nombres de Rayleigh pour lesquels le transfert de chaleur devient purement conductif alors que l'écart entre  $T_2$  et  $T_m$  est faible par rapport à l'écart  $\Delta T$  entre parois.

Lorsqu'il s'agit d'un milieu refroidi par dessous, l'inversion de densité est susceptible de destabiliser fortement le régime conductif. Dès que l'écart entre  $T_m$  et  $T_1$  dépasse la valeur critique définie par la courbe de stabilité ( $\{T_m - T_1\} = (\gamma/2 + 1)\Delta T$ ) le flux de chaleur croît fortement.

Les nombres de Nusselt moyens calculés sont représentables avec un écart type de 2,5% par la formule suivante

$$\overline{Nu}^* = 1 + 0,2958(Ra_2^*)^{0,4613} \quad \text{pour } \gamma \geq \gamma_c \quad (21)$$

où  $\gamma_c$  est la valeur critique du paramètre d'inversion à nombre de Rayleigh fixé

$$\begin{aligned} \gamma_c &= 16,1977(Ra_2^*)^{-0,5674} - 2, & 20 \leq Ra_2^* \leq 50 \\ \gamma_c &= 9,6775(Ra_2^*)^{-0,4357} - 2, & 50 \leq Ra_2^* \leq 70 \\ \gamma_c &= 7,4577(Ra_2^*)^{-0,3744} - 2, & 70 \leq Ra_2^* \leq 100 \\ \gamma_c &= 6,2338(Ra_2^*)^{-0,3355} - 2, & 100 \leq Ra_2^* \leq 500. \end{aligned}$$

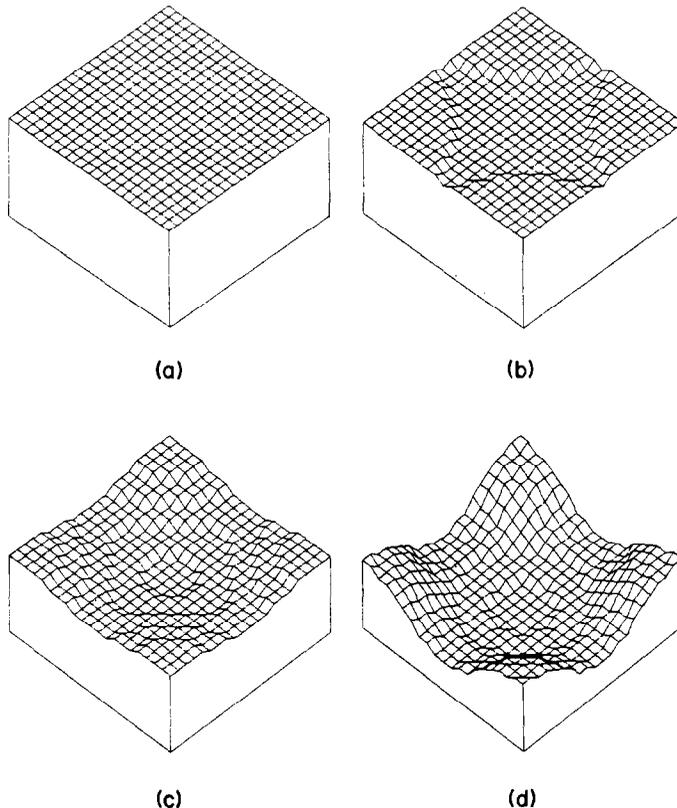


Fig. 4. Surfaces isothermes à  $Ra_2^* = 400$  et  $\gamma = -1,1$ ; (a)  $T = 0,1$ ; (b)  $T = 0,25$ ; (c)  $T = 0,50$ ; (d)  $T = 0,75$ .

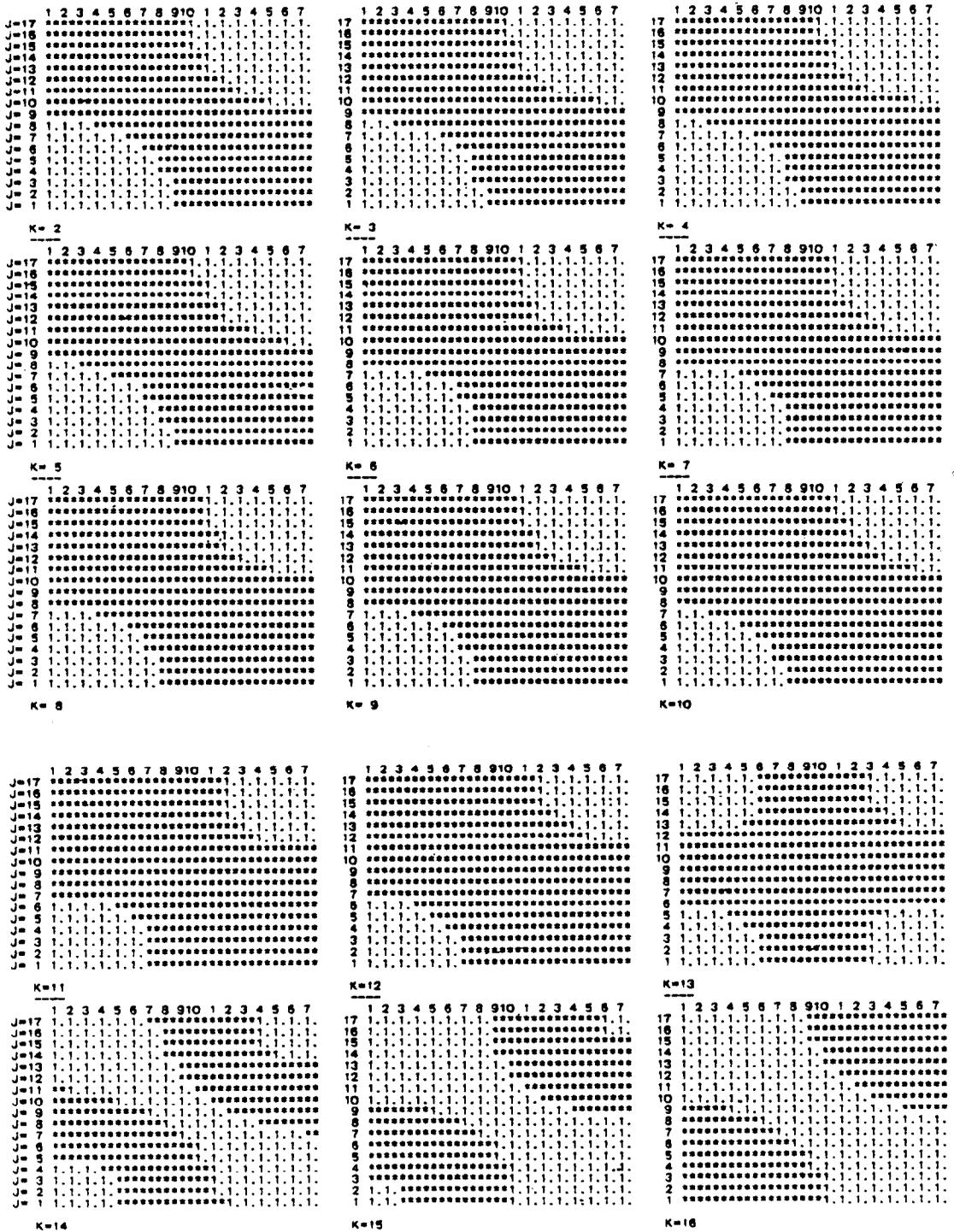


Fig. 5. Visualisation des vitesses verticales dans les plans horizontaux  $Z = (K - 1)/16$  pour  $Ra_2^* = 200$  et  $\gamma = -0.9$ .

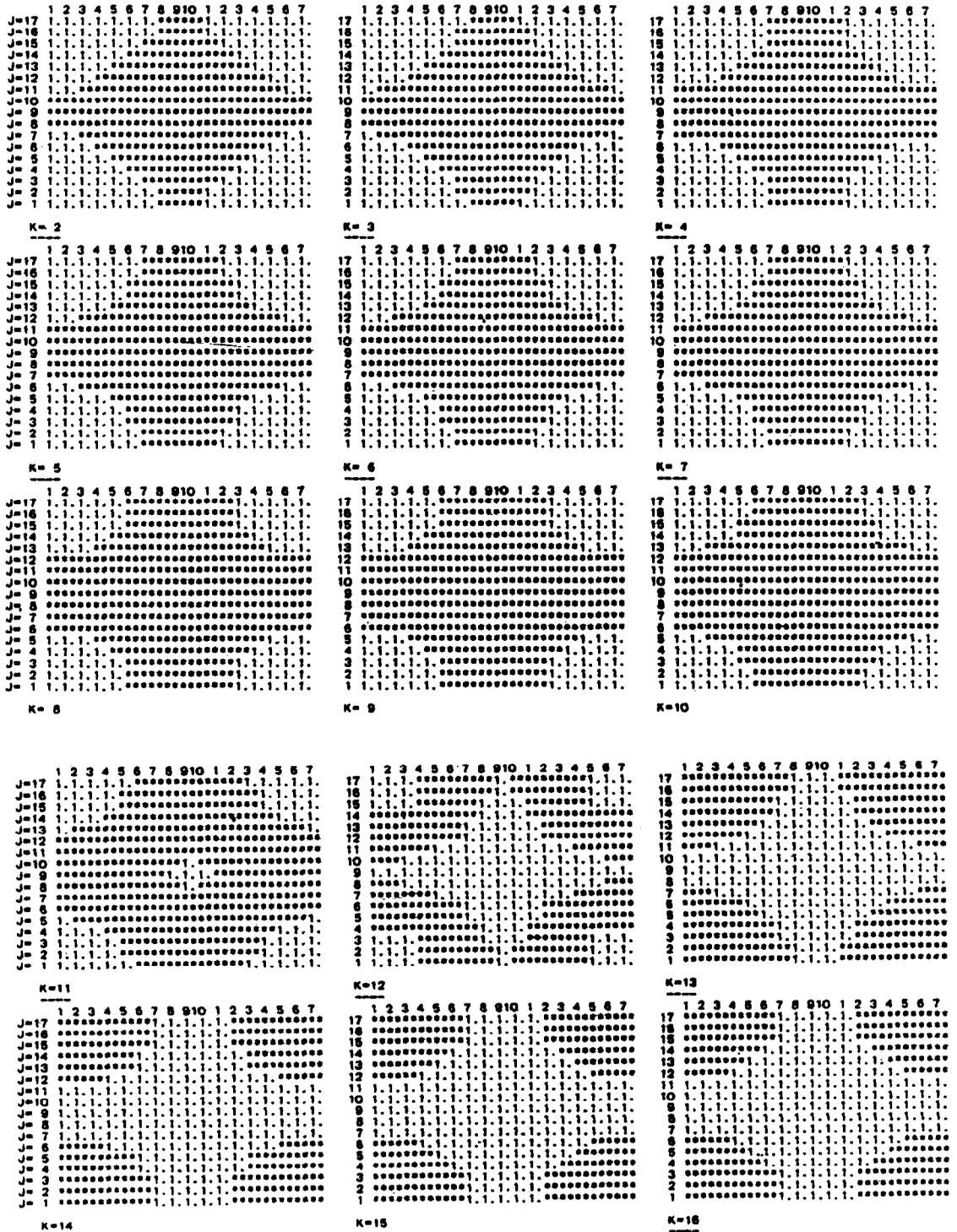


Fig. 6. Visualisation des vitesses verticales dans les plans horizontaux  $Z = (K-1)/16$  pour  $Ra_2^* = 400$  et  $\gamma = -1,1$ .

Une comparaison est faite avec les valeurs données par la formule de Yen, citée en introduction [2]

$$Nu^* = 0,024Ra_m^{0,85} \text{ pour } Ra_m > 100 \quad (22)$$

le nombre de Rayleigh  $Ra_m$  étant lié à  $Ra_2^*$  par

$$Ra_m = (\gamma + 2)Ra_2^* \quad (23)$$

Cette formule (22) a été établie expérimentalement en maintenant la température  $T_2 = 0^\circ\text{C}$  et en faisant varier  $T_1 = \Delta T$ , pour différentes hauteurs de couche et différents diamètres de billes. Les hauteurs (de 6 à 76 mm) et les diamètres (de 3 à 6 mm) étant faibles, la convection n'a pu être observée que pour des écarts de température  $\Delta T$  supérieur à  $16^\circ\text{C}$  afin de dépasser la valeur de Rayleigh critique, dans un domaine où l'inversion est faible puisque  $(T_m - T_2)$  reste fixé à la valeur de  $4^\circ\text{C}$ .

Dans les plages de variation de  $Ra_2^*$  et de  $\gamma$  ( $> -0,32$ ) communes aux conditions expérimentales et aux calculs tridimensionnels, les résultats obtenus par la corrélation (22) et par le calcul numérique sont très proches.

Au-delà, pour des valeurs quelconques de  $\gamma$  et  $Ra_2^*$ , il s'avère que la formule (22) ne peut pas être utilisée. Elle ne permet pas de traduire le transfert de chaleur dans la zone de forte influence du maximum de densité à grand nombre de Rayleigh car elle surestime la valeur du flux convectif.

Il apparaît néanmoins que, dans le domaine d'investigation expérimentale, les valeurs du flux de chaleur calculées pour une cavité cubique et mesurées pour une couche plane sont sensiblement égales.

Les structures d'écoulement du fluide sont tridimensionnelles dans tous les cas étudiés et présentent une symétrie soit par rapport à l'un des plans diagonaux, soit par rapport aux plans médians verticaux. Aux faibles valeurs du paramètre d'inversion, la cellule convective occupe toute la hauteur de la cavité. Lorsque l'écart entre  $T_m$  et  $T_2$  devient important, il apparaît une modification dans les structures ; on a pu observer dans tous les cas où  $\gamma$  est inférieur ou égal à  $\gamma = -0,8$  la superposition de deux régions distinctes dans l'épaisseur du milieu : les mouvements convectifs sont localisés en partie basse de la cavité et surmontés par une couche où les isothermes sont planes comme le montre le tracé des surfaces isothermes à  $Ra_2^* = 400$  et  $\gamma = -1,1$  (Fig. 4). La hauteur de la région de convection diminue avec l'effet de l'inversion de densité.

Ces observations rejoignent celle de Forbes et Cooper dans une couche fluide refroidie à  $0^\circ\text{C}$  par dessus [3] et celles de Merker dans une couche fluide refroidie à  $0^\circ\text{C}$  par dessous [6]. L'observation du champ de vitesses met en évidence que, dans la structure haute qui se développe au voisinage de la paroi supérieure, les vitesses sont faibles mais non nulles et qu'il s'y établit un mouvement de sens contraire à celui qui existe en partie basse. Ce mouvement, dû un effet d'entraînement visqueux, est représenté sur les Fig. 5 et 6 par la visualisation des composantes verticales de la vitesse en différents plans horizontaux, pour

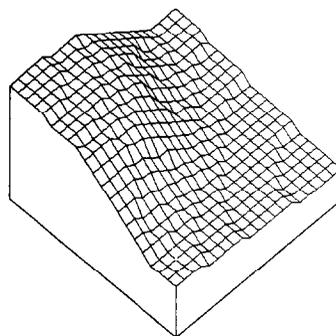


FIG. 7. Surface isotherme  $T = 0,5$  à  $Ra_2^* = 50$  et  $\gamma = 0,1$ .

$Ra^* = 200$ ,  $\gamma = -0,9$  et pour  $Ra^* = 400$ ,  $\gamma = -1,1$  respectivement.

Les zones claires correspondent aux vitesses ascendantes et les zones plus foncées aux vitesses descendantes.

Les différents types de structures d'écoulement obtenues selon les valeurs des paramètres  $Ra_2^*$  et  $\gamma$  sont illustrées par une représentation graphique de quelques surfaces isothermes et caractérisées par les modes  $l, m, n$  des coefficients dominants  $a_{lmn}$  du développement en série de  $T$ .

Pour un petit nombre de Rayleigh,  $Ra_2^* = 50$ , le mouvement correspond à la combinaison de deux rouleaux perpendiculaires d'axes parallèles à  $ox$  et  $oy$ . L'isotherme  $T = 0,5$  représentée sur la Fig. 7 a été obtenue en  $\gamma = 0,1$ , juste à la limite de la zone d'inversion. Les modes dominants sont  $l = 1, m = 0$  et  $n = 1$  et  $l = 0, m = 1$  et  $n = 1$  (semblables à ceux obtenus avec un fluide classique pour un nombre de Rayleigh voisin  $Ra^* = 60$ ). Lorsque  $\gamma$  diminue, les isothermes s'aplanissent en conservant une forme semblable.

A un nombre de Rayleigh supérieur,  $Ra_2^* = 100$ , l'écoulement s'organise en une cellule de symétries diagonales (en hélices croisées) illustrée par la Fig. 8. Le fluide monte avec une vitesse maximale le long de deux arêtes opposées et redescend avec une vitesse maximale dans le plan diagonal qui les sépare au voisinage des deux autres arêtes. L'isotherme  $T = 0,5$  est représentative du mode dominant  $(1, 1, 1)$ . L'isotherme  $T = 0,75$  montre le mouvement ascensionnel du fluide autour d'une diagonale près de la paroi inférieure. Les termes d'ordre élevé du développement selon la coordonnée verticale  $z$  (jusqu'à l'ordre  $N = 5$ ) participent de façon non négligeable à l'expression de la solution, notamment le mode  $(1, 1, 3)$ . Lorsque  $\gamma$  diminue, on note simplement une atténuation des mouvements convectifs et une moindre déformation des isothermes. En  $\gamma = -0,5$ , l'ascension du fluide à partir de base est limitée au voisinage des deux arêtes.

Pour  $Ra_2^* = 200$  et  $\gamma = -0,6$ , le même type de mouvement est encore observé. Lorsque  $\gamma$  diminue et approche des valeurs correspondant à une forte inversion (en  $\gamma = -1$ ,  $T_m$  est la moyenne arithmétique des températures aux frontières), on voit apparaître, en haut de l'enceinte, la superposition d'une deuxième

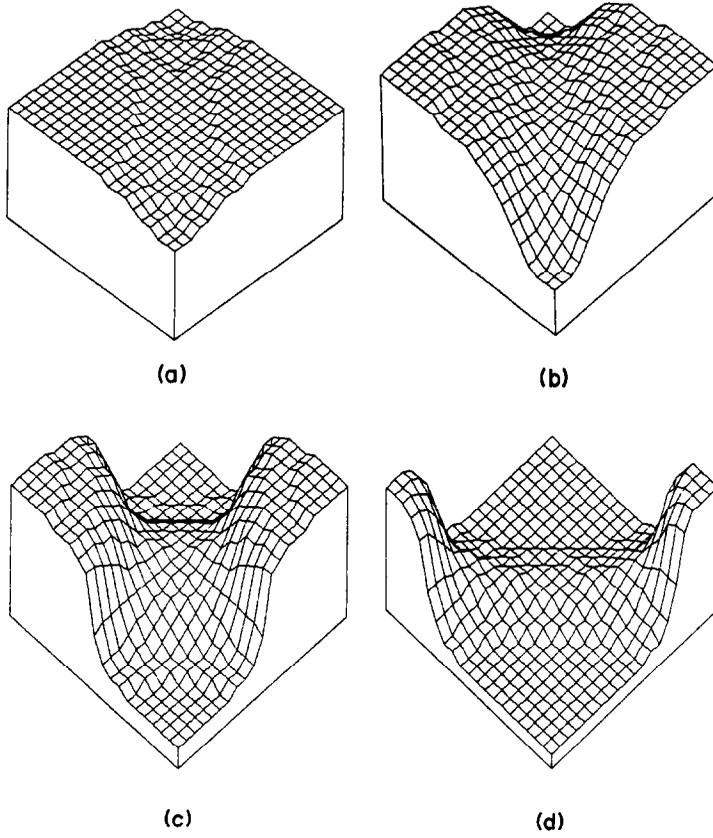


FIG. 8. Surfaces isothermes à  $Ra^* = 100$  et  $\gamma = 0$ : (a)  $T = 0,1$ ; (b)  $T = 0,25$ ; (c)  $T = 0,50$ ; (d)  $T = 0,75$ .

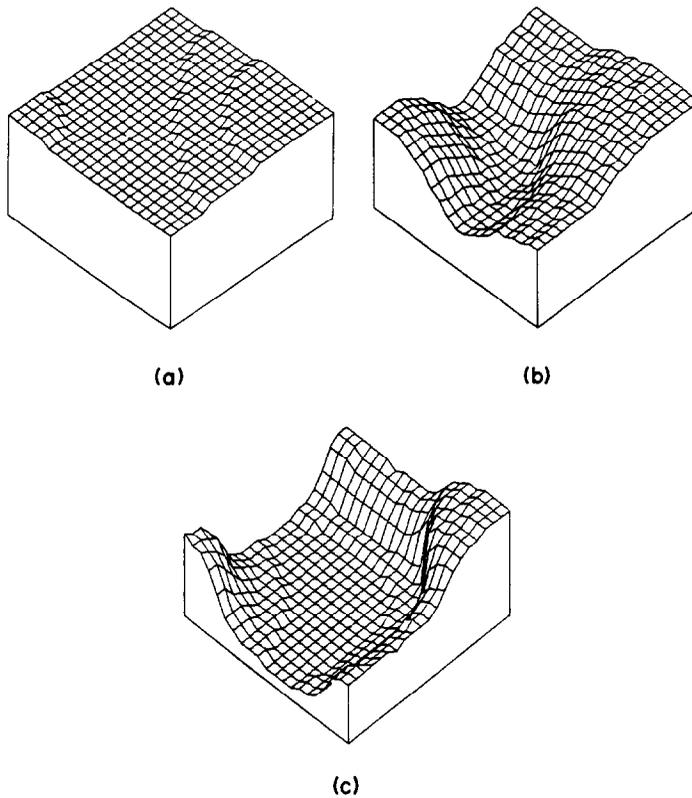


FIG. 9. Surfaces isothermes à  $Ra^* = 300$  et  $\gamma = -0,8$ : (a)  $T = 0,15$ ; (b)  $T = 0,50$ ; (c)  $T = 0,75$ .

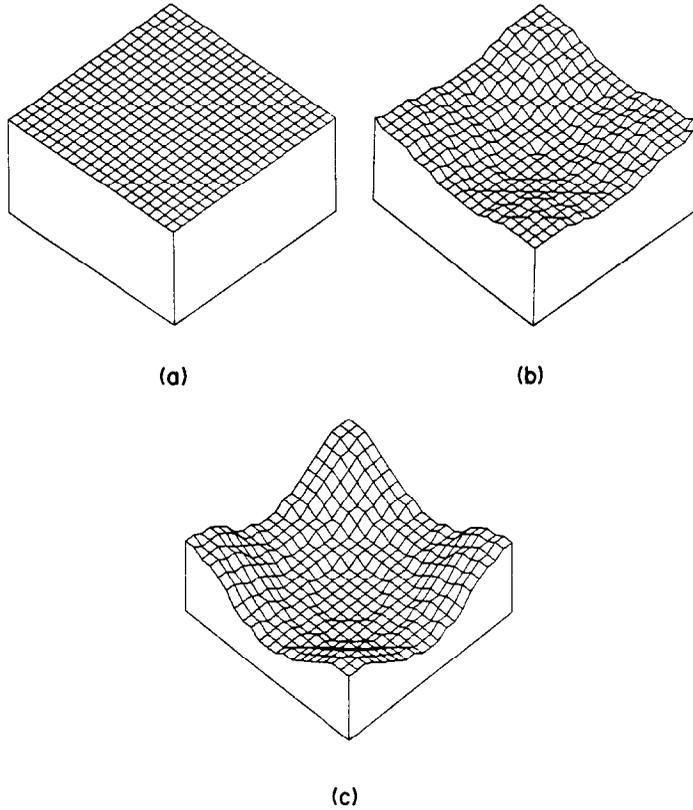


FIG. 10. Surfaces isothermes à  $Ra_2^* = 300$  et  $\gamma = -1,0$ : (a)  $T = 0,15$ ; (b)  $T = 0,50$ ; (c)  $T = 0,75$ .

structure d'écoulement de faibles vitesses et de sens contraire.

L'augmentation de l'inversion de densité favorise le développement des modes  $(2, 0, 1)$  et  $(0, 2, 1)$ . En  $Ra_2^* = 300$  et  $\gamma = -0,8$ , la structure est complexe (Fig. 9), où se combinent les modes  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$  et  $(0, 1, 1)$ ,  $(2, 0, 1)$  et  $(0, 2, 1)$ . Pour  $\gamma = -1$ , ces derniers modes dominent et sont reconnaissables sur le tracé de l'isotherme  $T = 0,5$  [Fig. 10(b)]. La Fig. 10(a) met en évidence la région haute où le transfert est principalement conductif.

L'inversion du sens des vitesses apparaît dans le tiers supérieur de l'enceinte. L'écoulement est symétrique dans les quatre quarts de la cavité délimités par les plans médians verticaux. Dans la moitié inférieure de l'enceinte, il correspond à la combinaison de deux rouleaux contra-rotatifs d'axes parallèles à  $ox$  et de deux rouleaux contra-rotatifs d'axes parallèles à  $oy$ .

La combinaison de ces mêmes modes et la même évolution d'une structure de mélange vers une structure de modes  $(2, 0, 1)$  et  $(0, 2, 1)$  se retrouve pour  $Ra_2^* = 400$  lorsque  $\gamma$  varie de  $-0,9$  à  $-1,1$  et pour  $Ra_2^* = 500$  entre  $\gamma = -1$  et  $\gamma = -1,1$ .

Les nombres de Nusselt correspondant à ces structures sont mentionnés dans le Tableau 1 qui résume les principaux résultats obtenus pour le transfert de chaleur et les modes dominants des structures d'écoulement.

4. CONCLUSION

Il a été observé que l'inversion de densité peut provoquer une dissociation de l'écoulement en deux structures superposées dans l'épaisseur du milieu

Tableau 1. Résultats de la modélisation tridimensionnelle pour le transfert de chaleur et les structures d'écoulement

$\gamma$	$Ra_2^*$	$Nu^*$	Modes dominants $(l, m, n)$ de la structure finale
0	50	1,401	$(1, 0, 1)$ $(0, 1, 1)$
	100	2,658	$(1, 1, 1)$
-0,6	100	1,176	$(1, 1, 1)$
	200	2,189	$(1, 1, 1)$
-0,8	200	1,535	$(1, 1, 1)$
			$(1, 1, 1)$
	300	2,16	$(1, 0, 1)$ $(0, 1, 1)$ $(2, 0, 1)$ $(0, 2, 1)$
-1,0	300	1,263	$(2, 0, 1)$ $(0, 2, 1)$
			$(2, 0, 1)$ $(0, 2, 1)$
	400	1,714	$(1, 0, 1)$ $(0, 1, 1)$
-1,1			$(1, 1, 1)$
			$(2, 0, 1)$ $(0, 2, 1)$
	500	2,096	$(1, 0, 1)$ $(0, 1, 1)$ $(1, 1, 1)$
-1,1	400	1,265	$(2, 0, 1)$ $(0, 2, 1)$
	500	1,532	$(2, 0, 1)$ $(0, 2, 1)$

poreux dans un modèle où le gradient de température imposé est vertical. Le transfert de chaleur diminue avec la hauteur de la région où se développent les mouvements convectifs. Le nombre de Nusselt peut être représenté en fonction du nombre de Rayleigh et du paramètre d'inversion par la formule (21).

#### REFERENCES

1. Z. S. Sun, C. Tien and Y. C. Yen, Onset of convection in a porous medium containing liquid with a density maximum, *Proc. 4th Int. Heat Transfer Conf.*, Versailles, Paris, Vol. IV, NC 2-11 (1972).
2. Y. C. Yen, Effects of density inversion on free convective heat transfer in porous layer heated from below, *Int. J. Heat Mass Transfer* **17**, 1349-1356 (1974).
3. R. E. Forbes and J. W. Copper, Natural convection in a horizontal layer of water cooled from above to near freezing, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs, Series C, J. Heat Transfer* **97**, 47-53 (1975).
4. J. P. Caltagirone, G. Meyer et A. Mojtabi, Structurations thermoconvectives tridimensionnelles dans une couche poreuse horizontale, *J. Méc.* **20**(2), 219-232 (1981).
5. M. A. Combarous and S. A. Bories, Hydrothermal convection in saturated porous media, *Adv. Hydrosol.* **10**, 231-307 (1975).
6. G. P. Merker and J. Straub, Rayleigh-Bénard convection in water with maximum density effects, *Wärme und Stoffübertragung* **16**, 63-68 (1982).

#### THREE-DIMENSIONAL FREE CONVECTIVE HEAT TRANSFER IN SATURATED POROUS MEDIA WITH MAXIMUM DENSITY EFFECTS

**Abstract**—A numerical study has been carried out to investigate the effects of density inversion on free convective heat transfer in a porous medium confined in a parallelepipedic box. The horizontal boundaries are maintained at uniform temperatures and the vertical walls are adiabatic. A parabolic density-temperature relationship is used in Darcy's law. The analysis is performed using a three-dimensional model based on the Galerkin method. An explicit time integration scheme is used. The computation was made assuming a cubic box. Numerical results are discussed, showing that density inversion causes the fluid depth to be divided into two distinctive regions: a lower one in which the heat transfer is chiefly convective, an upper stable one in which the heat transfer occurs by conduction primarily. The effects of maximum density on Nusselt number are also presented.

#### DREIDIMENSIONALER WÄRMETRANSPORT INFOLGE FREIER KONVEKTION IN GESÄTTIGTEN PORÖSEN MEDIEN MIT DEN EINFLÜSSEN DES DICHEMAXIMUMS

**Zusammenfassung**—Eine numerische Untersuchung wurde durchgeführt, um die Einflüsse der Dichte-Inversion auf den Wärmetransport infolge freier Konvektion in einem porösen Medium zu untersuchen, das die Form eines Parallelepipeds besitzt. Die horizontalen Begrenzungen wurden auf einheitlichen Temperaturen gehalten, die senkrechten Wände waren adiabat. Eine parabolische Dichte-Temperatur-Beziehung wurde in die Darcy-Gleichung eingesetzt. Die Untersuchung wurde mit Hilfe eines dreidimensionalen Modells auf der Grundlage der Galerkin-Methode durchgeführt. Ein explizites Zeitintegrationsverfahren wird angewendet. Die Berechnung wurde unter der Annahme eines würfelförmigen Behälters ausgeführt. Die Diskussion der numerischen Ergebnisse zeigt infolge der Dichte-Inversion eine Aufteilung der Bettiefe in zwei Gebiete: ein unteres, in dem der Wärmetransport hauptsächlich konvektiv erfolgt, und ein stabil darüberliegendes, in dem der Wärmetransport vorwiegend durch Leitung stattfindet. Die Einflüsse des Dichtemaximums auf die Nusselt-Zahl werden ebenfalls vorgestellt.

#### ВЛИЯНИЕ МАКСИМУМА ПЛОТНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫЙ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛОПЕРЕНОС В НАСЫЩЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

**Аннотация**—Численно исследовано влияние инверсии плотности на свободноконвективный теплоперенос в пористой среде, заключенной в контейнер в форме параллелепипеда. Горизонтальные поверхности контейнера поддерживаются при постоянной температуре, а вертикальные являются адиабатическими. Для описания процесса используется закон Дарси и параболическая зависимость плотности от температуры. Исследование проводится с применением трехмерной модели, основанной на методе Галеркина, а также с использованием явной схемы численного интегрирования. Расчеты проводились на кубической геометрии. Обсуждаются численные результаты, свидетельствующие о том, что в результате инверсии плотности происходит разделение жидкости по высоте на две четкие зоны: нижнюю, в которой теплоперенос происходит в основном за счет конвекции, и верхнюю, устойчивую, где тепло переносится главным образом теплопроводностью. Установлено влияние максимальной плотности на число Нуссельта.